如何計算圓錐曲線的切線

台北市立陽明高中數學科　羅驥韡

計算圓錐曲線的切線方程式，一直是個難題，尤其是對一般高中生的程度來說，更何況針對不同的圓錐曲線（橢圓、拋物線、雙曲線等）而言，又有不同的切線公式，感覺上既不統一又難以記憶，所以我在這裡要介紹一種算法，一種統一的算法，讓你不管面對何種圓錐曲線，都可以直接應用的公式。

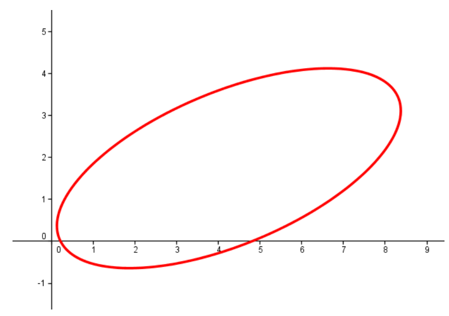
圓錐曲線方程式

在座標平面上，我們知道，不管是哪一種圓錐曲線，都可以表示為以下的形式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

例如

- 橢圓：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，我們可以寫成：$x^2+4y^2-4=0$
- 拋物線：$y^2=4(x-1)$，我們可以寫成：$y^2-4x+4=0$
- 雙曲線：$\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$，我們可以寫成：$3x^2-y^2-3=0$



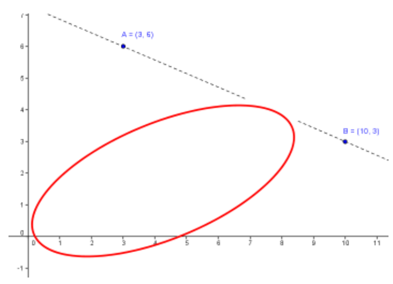
當然上面所舉的例子都是所謂的「標準式」，也就是這些圓錐曲線在座標平面上的位置都是經過特別安排的，所以方程式會看起來特別漂亮簡潔。

一般說來，如果圓錐曲線沒有在「標準位置」的話，那麼它的方程式就會看起來有點複雜，例如：$x^2-2xy+3y^2-5x-2y+1=0$，它的圖形會像右圖一樣：

如何判斷一條通過特定兩點的線是不是切線呢？

例題 1　我在上面的圓錐曲線中，再加入兩個點 A(3,6)與 B(10,3)，那麼連接這兩點的直線到底是不是切線呢？，

解答



要回答這樣的問題，我們可以利用直線的參數式來測試看看，到底這個直線與圓錐曲線有幾個交點，以下我們就來計算看看：

首先，通過 AB 兩點的直線參數式為：

$$\begin{cases} x=3+7t \\ y=6-3t \end{cases}$$

我們將這組點座標代入圓錐曲線方程式$x^2-2xy+3y^2-5x-2y+1=0$，得到：

$$(3+7t)^2-2(3+7t)(6-3t)+3(6-3t)^2-5(3+7t)-2(6-3t)+1=0$$

化簡得：

$$118t^2 - 161t + 55 = 0$$

計算它的判別式可以得到：

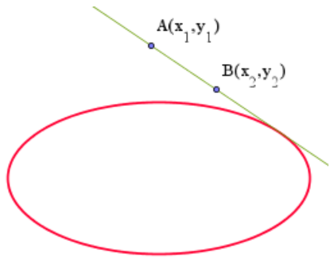
$$(-161)^2 - 4(118)(55) = -33 < 0$$

所以由判別式小於零，我們可以知道上述的直線與圓錐曲線沒有任何交點（雖然圖形上看起來「好像」切到，但事實上，精確的計算告訴我們並沒有）。

一般說來，要判斷一條通過特定兩點的線是不是切線，都可以利用上述的方法來達成。既然這個方法這麼好用，那麼我們何不利用這樣的思考模式，發展出一些好用的公式或判斷的法則呢？沒錯！這正是我們這篇文章的目的，所以我們就繼續往下探索看看吧！

探索切線的公式或準則

假設直線通過 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，圓錐曲線為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ，那麼我們利用上述同樣的方法來計算看看，直線參數式與圓錐曲線之間，有沒有任何交點。



首先，直線參數式為：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

然後，我們將這組座標代入圓錐曲線方程式，得到：

$$\begin{aligned} & a[x_1+(x_2-x_1)t]^2 + b[x_1+(x_2-x_1)t][y_1+(y_2-y_1)t] + c[y_1+(y_2-y_1)t]^2 \\ & + d[x_1+(x_2-x_1)t] + e[y_1+(y_2-y_1)t] + f = 0 \end{aligned}$$

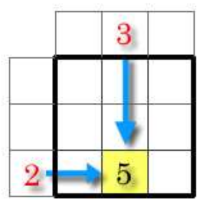
如果我們將上面的計算式整理成 t 的二次式，會得到：

$$\begin{aligned} & [a(x_2-x_1)^2 + b(x_2-x_1)(y_2-y_1) + c(y_2-y_1)^2]\cdot t^2 \\ & + [2ax_1(x_2-x_1) + bx_1(y_2-y_1) + by_1(x_2-x_1) + 2cy_1(y_2-y_1) + d(x_2-x_1) + e(y_2-y_1)]\cdot t \\ & + [ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f] = 0 \end{aligned}$$

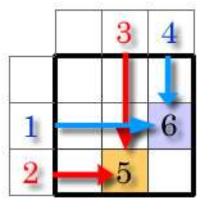
當然，如果我們要計算這個二次式到底有沒有解，還要計算它的判別式，這時你或許會想：天啊！它的係數已經如此複雜了，我們竟然還想去計算它的判別式？就算我們真的花了九牛二虎之力把它算出來了，難道我們還會想去記憶它或應用它嗎？的確，我們是遇上了瓶頸，我們遇到變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境。然而，正是因為面對這樣的窘境，才讓數學家了解到：必須開發新的符號與新的運算規則，讓我們可以繞過複雜計算的深淵，繼續邁向推理解題的大道。以下我們就來介紹這個新的利器。

開發新的運算符號

首先，我們先來介紹一種「表格式乘積加總法」：



在左邊的表格中，2 所在的那一橫列與 3 所在的那一直行，對到了數字 5，這時我們規定：2、3、5 要乘起來，也就是會得到 $2\times3\times5=30$



我們在左表中，又多放了一些數字上去，現在我們要計算 $2\times3\times5$ 和 $1\times4\times6$ ，並把它們加總起來，所以其實我們要計算的是：

$2\times3\times5+1\times4\times6=30+24$

	1	3	4
0	-1	-2	7
1	0	8	6
2	-4	5	0

在這個例子中，我們填上所有的數字，並利用上面說明的方式將所有的乘積全部加起來。首先，我們先將左側的數字 0, 1, 2 和上側的數字 1, 3, 4 乘到格子裡，可以得到下表中的數字：

0	0	0
0	24	24
-8	30	0

最後，我們只要將表格中所有的數字加起來，那麼所得到的數字就是我們想要計算的總和，也就是：

$24 + 24 - 8 + 30 = 70$

這就是我們所說的「表格式乘積加總法」。

當然，如果你學過「矩陣」乘法，你會知道我們這裡所謂的「表格式乘積加總法」，其實可以用矩陣來表示。例如：上面所舉的最後一個例子，可以利用矩陣乘法：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 0 & 8 & 6 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ 來表示。

不過，如果你沒學過矩陣，那也沒關係，請繼續看我們以下的討論就可以了。

我們這裡為什麼要介紹這樣「怪異的加總法」呢？主要是因為這種加總法剛好跟圓錐曲線的方程式有某種巧妙的連結。請看以下的例子：

	x	y	1
x	-1	-2	7
y	0	8	6
1	-4	5	0

在左表中，如果我們運用「表格式乘積加總法」，那麼我們會得到：

$$-x^2 - 2xy + 8y^2 + 3x + 11y + 0$$

請讀者注意看：這剛好是圓錐曲線方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

等號左邊的形式，這也正是為什麼我們要介紹這種加總法的原因。

	x	y	1
x	a	$b/2$	$d/2$
y	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

如果我們在表格中設定了像左表一樣的數字（請注意裡面的 $\frac{b}{2}$、$\frac{d}{2}$、$\frac{e}{2}$），那麼我們就會得到與圓錐曲線一般式（等號左邊）一模一樣的形式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

	x_2	y_2	z_2
x_1	a	b	c
y_1	d	e	f
z_1	g	h	i

最後，為了靈活運用這樣的計算法，我們把最通用的形式寫出來，並且徹底研究這種運算法的規則，才能順利地用於後面的解題推理中。但是，我們總不能每次都用畫表格的方式來表現，所以在這裡我們假設：

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad P = (x_1, y_1, z_1) \quad Q = (x_2, y_2, z_2)$$

並且，我們規定新的符號：

$$[P, Q]_M$$

就代表左表所表示的「表格式乘積總和」，也就是：

$$
\begin{aligned}
[P,Q]_M = \ & ax_1x_2 + bx_1y_2 + cx_1z_2 \\
& + dy_1x_2 + ey_1y_2 + fy_1z_2 \\
& + gz_1x_2 + hz_1y_2 + iz_1z_2
\end{aligned}
$$

新符號的定義

$$
[P,Q]_M = \begin{array}{c|ccc}
 & x_2 & y_2 & z_2 \\
\hline
x_1 & a & b & c \\
y_1 & d & e & f \\
z_1 & g & h & i
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & ax_1x_2 + bx_1y_2 + cx_1z_2 \\
& + dy_1x_2 + ey_1y_2 + fy_1z_2 \\
& + gz_1x_2 + hz_1y_2 + iz_1z_2
\end{aligned}
$$

究竟這樣的新符號有什麼漂亮的運算規則呢？請看以下的說明：

新符號的運算性質

假設我們除了上述的新符號之外，我們也引用一般的「向量加法」與「純量積」的運算概念，也就是下列的運算規則：

- 若 $P=(x_1,y_1,z_1),\quad Q=(x_2,y_2,z_2)$，則 $P+Q$ 代表 $(x_1+x_2,\,y_1+y_2,\,z_1+z_2)$。
- 若 $P=(x,y,z)$，t 為實數，則 tP 代表 (tx,ty,tz)。

那麼，我們所使用的新符號就會有以下的運算規則：

假設 $P=(x_1,y_1,z_1)$、$Q=(x_2,y_2,z_2)$、$R=(x_3,y_3,z_3)$，t 為實數，則有

- 加法分配律：
  $[P+Q,R]_M=[P,R]_M+[Q,R]_M$ 或 $[P,Q+R]_M=[P,Q]_M+[P,R]_M$

- 純量積：
  $[tP,Q]_M=t[P,Q]_M=[P,tQ]_M$

一般而言，「交換律」並不成立，也就是 $[P,Q]_M=[Q,P]_M$ 通常是錯的，但如果 M 是「對稱」的，那麼交換律也會是正確的。但我們說 M 是「對稱」的，指的是什麼意思呢？在這裡我舉個例子：

左表中，數字 1、4、7 所在的位置，我們術語上稱為矩陣的「主對角線」，在這主對角線的兩側的「格子對」(如圖中紅色的箭頭所指的三對格子)，如果都各自相同，那麼我們就說：這個矩陣是「對稱」的。

	x	y	1
x	a	$b/2$	$d/2$
y	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

左表中，如果我們假設：

$$M=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \quad P=(x,y,1)$$

那麼，圓錐曲線的方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

就可以寫成：

$$[P,P]_M=0$$

這裡的 M 就是一個典型的「對稱矩陣」。從現在開始，我們將這個矩陣稱為圓錐曲線的「係數矩陣」。

因此，如果 M 是「對稱」的，那麼我們的新符號就擁有了「交換律」:

- $[P,Q]_M=[Q,P]_M$

以上所說得運算性質，會在下面的討論中一直出現，但我們將這些性質的證明放到本文最後的附錄中，因為雖然這些證明很重要，但並不是我們要討論的重點，所以介紹完新的符號後，我們趕快回到原來的問題上吧！

我們原來的問題是：如果直線通過 $A=(x_1,y_1)$、$B=(x_2,y_2)$ 兩點，那麼它與圓錐曲線：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 到底會不會相交？在什麼條件下，它才會變成切線？

豁然開朗的切線準則

我們前面有提到，如果點 (x,y) 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上面，那麼這個點座標代入方程式當然會等於零，如果我們用「表格式乘積加總法」來表示的話，那會得到：

	x	y	1
x	a	$b/2$	$d/2$
y	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

$=0$

所以，如果 A 的座標為 (x,y)，那麼我們希望用 $\overline{A}$ 來代表（x, y, 1），這樣的話，我們就可以用更簡短的方式來表示一個點是否在圓錐曲線上了，也就是：

$A(x,y)$ 在 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上

可以寫成：

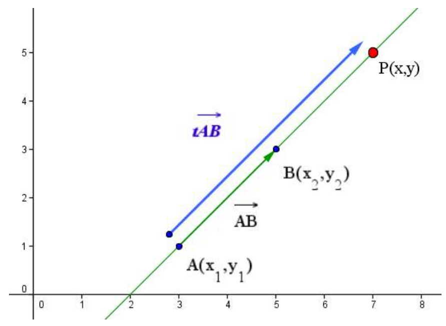
	x	y	1
x	a	$b/2$	$d/2$
y	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

$= \left[\overline{A}, \overline{A}\right]_M = 0$ ，其中 $M = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$

我們就不妨把 $\overline{A}(x, y, 1)$ 稱為是 $A(x, y)$ 的「擴充座標」吧！（註：比較正式的說法是「齊次座標」）

所以假設我們說 B 點的座標為（4, 5），那麼 $\overline{B}$ 就表示是（4, 5 , **1**），其餘請以此類推。好！我們已經做完所有的準備工作了，現在讓我們正式開始繼續切線的推理工作吧！

通過 $A = (x_1, y_1)$、$B = (x_2, y_2)$ 兩點的直線參數式為：



$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$

我們也可以寫成這樣：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

如果我們把 (x, y) 稱為 P，那麼會有：

$$P = (1-t)A + tB$$

事實上，對於「擴充座標」$\overline{P}(x, y, 1)$ 來說，下面的式子也是對的：

$$\overline{P} = (1-t)\overline{A} + t\overline{B}$$

也就是：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是對的（請讀者自行檢驗）。

現在，如果我們要檢查 AB 直線上的動點 P 是不是在圓錐曲線上，我們只要檢查：

$\left[\overline{P}, \overline{P}\right]_M = 0$ 對不對就好。

但因為：

$$\overline{P} = (1-t)\overline{A} + t\overline{B}$$

所以，我們要檢查：

$\left[(1-t)\overline{A} + t\overline{B}, (1-t)\overline{A} + t\overline{B}\right]_M = 0$ 有沒有解？

接著我們整理（利用新符號的運算性質）：

$$
\begin{aligned}
&\left[(1-t)\overline{A}+t\overline{B},\,(1-t)\overline{A}+t\overline{B}\right]_M \\
&=(1-t)^2[\overline{A},\overline{A}]_M+2t(1-t)[\overline{A},\overline{B}]_M+t^2[\overline{B},\overline{B}]_M \\
&=\left([\overline{A},\overline{A}]_M-2[\overline{A},\overline{B}]_M+[\overline{B},\overline{B}]_M\right)\cdot t^2+\left(-2[\overline{A},\overline{A}]_M+2[\overline{A},\overline{B}]_M\right)\cdot t+\left([\overline{A},\overline{A}]_M\right)
\end{aligned}
$$

之前，我們對這個 t 的二次式有沒有解束手無策，現在有了新的符號幫忙下，如虎添翼，我們不僅用新符號重新算出這個二次式，這一次我們更要計算出它的判別式，請繼續看下面判別式的計算：

$$
\begin{aligned}
&\left(-2[\overline{A},\overline{A}]_M+2[\overline{A},\overline{B}]_M\right)^2-4\left([\overline{A},\overline{A}]_M-2[\overline{A},\overline{B}]_M+[\overline{B},\overline{B}]_M\right)\left([\overline{A},\overline{A}]_M\right) \\
&=4\left([\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{B}}]_M\right)
\end{aligned}
$$

從上式，我們得到一個非常重要的結果，也是本文最主要的結果，當：

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{B}}]_M=0 \text{ 時}$$

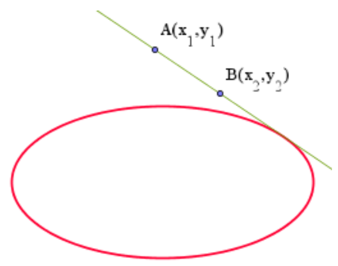
判別式為零，此時意味著：直線 AB 與圓錐曲線的交點只有一個，這個交點就是切點，此直線就是切線。因為這個「切線準則」太重要了，所以我們重新再敘述一遍：

切線準則

若通過 $A(x_1,y_1)$ 與 $B(x_2,y_2)$ 的直線為圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的切線，則「擴充座標」

$\overline{A}(x_1,y_1,1)$、$\overline{B}(x_2,y_2,1)$

會擁有以下的切線準則：



- $[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{B}}]_M=0$

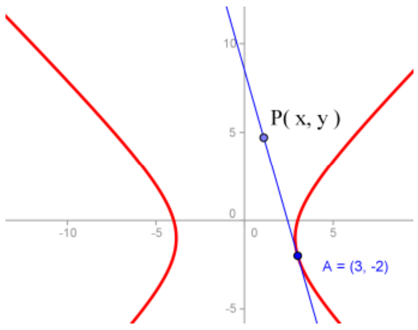
之前我們完全無法處理的判別式，現在竟然化為如此簡短的數學式，可見新符號的威力真是驚人！

切線準則的應用

現在讓我們舉幾個例子來看看如何使用這個超強的「切線準則」。

例題 2：A(3, -2) 在雙曲線 $x^2 - y^2 + x - 2y - 12 = 0$ 上。請問經過 A 點的切線方程式是什麼？

解答



假設 P(x, y)為切線上的一點，那麼通過 A 與 P 的直線，事實上就是切線本身，既然如此，那麼 $\overline{\mathbf{A}}$ 與 $\overline{\mathbf{P}}$ 就會符合「切線準則」：

$$\left[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{P}}\right]_M^2 - \left[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}\right]_M \left[\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{P}}\right]_M = 0$$

但因為 A 本身在雙曲線上，所以：

$$\left[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}\right]_M = 0$$

因此，我們可以得到：

$$\left[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{P}}\right]_M = 0$$

也就是：

	x	y	1
3	1	0	½
-2	0	-1	-1
1	½	-1	-12

$= 0$

經整理可得：

$$\frac{7}{2}x + y - \frac{17}{2} = 0$$

或者你也可以寫成 $7x + 2y = 17$，這就是經過 A 點的切線方程式。

經過上面這個例題的探討，我們發現一個漂亮的現象，那就是：

過切點的切線方程式

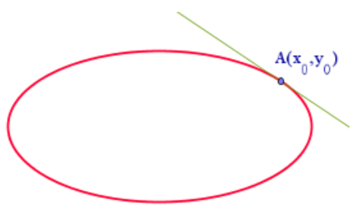
若 $A(x_0, y_0)$ 在圓錐曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 上，則通過 A 點的切線方程式為：

$$\left[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{X}}\right]_M = 0$$ ，其中 $\overline{\mathbf{X}} = (x, y, 1)$

也就是切線方程式為：

	x	y	1
x_0	a	$b/2$	$d/2$
y_0	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

$= 0$



現在，我們將這個公式應用到所有圓錐曲線的標準式上，你會發現：所有我們熟知的標準式切線公式（如

果你曾經記憶過的話），會一一出現。請看：

下表中，我們假設(x_0, y_0)為圓錐曲線上的一點

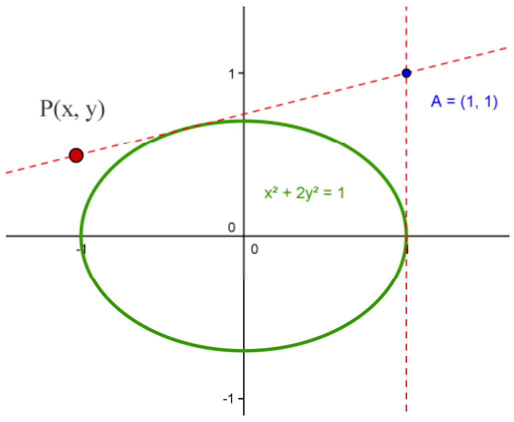
類型	標準式	計算切線	所得切線方程式
橢圓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ $=0$	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$
拋物線（上下型）	$x^2=4cy$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & 0 & -2c \\ 1 & 0 & -2c & 0 \end{array}$ $=0$	$x_0x=2c(y+y_0)$
拋物線（左右型）	$y^2=4cx$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 0 & 0 & -2c \\ y_0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2c & 0 & 0 \end{array}$ $=0$	$y_0y=2c(x+x_0)$
雙曲線（左右型）	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ $=0$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$
雙曲線（上下型）	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ $=0$	$-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$

雖然上面我們列出了所有的標準式的切線公式，但我們這樣做只是為了要向你說明：我們的「切線準則」是通用的，你可以用於任一類型的圓錐曲線，而不是要你去背誦上面這些看起來都不太一樣的切線公式。

上面我們一直把重心擺在解決如何計算圓錐曲線上一點的切線，但是如果要計算通過圓錐曲線外一點的切線時，那麼又該如何呢？請看下面的例子：

例題 3 請計算通過 A(1, 1)，並與橢圓 $x^2+2y^2=1$ 相切的切線方程式。
注意：A 點在橢圓外！所以會有兩條切線。

解答



假設 $\mathbf{P}(x,y)$ 為切線上的一點，那麼根據「切線準則」，我們可以得到：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M^2-\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M\left[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=0$$

其中：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=\begin{array}{c} \\ 1\\ 1\\ 1\end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & 1\end{matrix}\\ \left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}\right.\end{array}=x+2y-1$$

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M=1^2+2\times1^2-1=2$$ $\boxed{註}$：就是將 A(1,1) 直接代入 x^2+2y^2-1

$$\left[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=x^2+2y^2-1$$ $\boxed{註}$：就是將 $\mathbf{P}(x,y)$ 直接代入 x^2+2y^2-1

因此，

$$(x+2y-1)^2-2(x^2+2y^2-1)=0$$

整理可得：

$$x^2-4xy+2x+4y-3=0$$

最後我們作因式分解（我們知道答案是兩條直線，所以應該可以分解成兩條直線方程式）：

$$(-4x+4)y+(x^2+2x-3)=0$$
$$-4(x-1)y+(x-1)(x+2)=0$$
$$(x-1)(-4y+x-2)=0$$

因此：

$$x-1=0 \quad 或 \quad x-4y+3=0$$

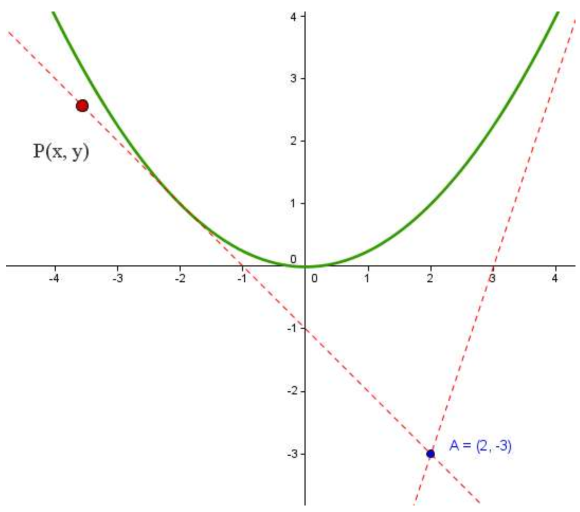
最後這兩個方程式都是直線方程式，而且也是 $\mathbf{P}(x,y)$ 必須符合的條件，所以這兩條直線就是切線！

例題 4 請計算通過 A(2, -3)，並與拋物線 $x^2=4y$ 相切的切線方程式。
注意：A 點在拋物線外！所以會有兩條切線。

解答

假設 $\mathbf{P}(x,y)$ 為切線上的一點，那麼根據「切線準則」，我們可以得到：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M^2-\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M\left[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=0$$



其中：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=\begin{array}{c} \\ 2\\ -3\\ 1\end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & 1\end{matrix}\\ \left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{matrix}\right.\end{array}=2x-2y+6$$

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M=2^2-4(-3)=16$$

$$\left[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}\right]_M=x^2-4y$$

因此，

$$(2x-2y+6)^2-16(x^2-4y)=0$$

整理可得：

$$3x^2+2xy-y^2-6x-10y-9=0$$

最後我們作因式分解：

$$3x^2+(2y-6)x-(y^2+10y+9)=0$$
$$3x^2+(2y-6)x-(y+1)(y+9)=0$$
$$[x+(y+1)][3x-(y+9)]=0$$

因此：

$$x+y+1=0 \quad 或 \quad 3x-y-9=0$$

最後這兩個直線方程式，就是切線！

一般說來，如果一個點在圓錐曲線之外，那麼它會擁有兩條切線，但還有另外一條線跟這個點也有密切的關係，這條線叫做「極線」，請看以下的探討：

極線的探討

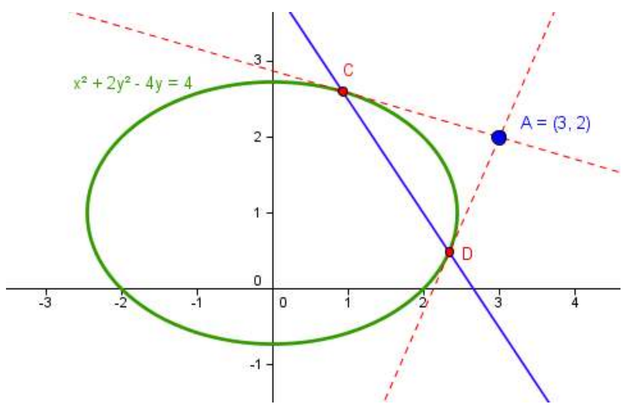
例題 5 已知 A(3, 2)在橢圓 $x^2+2y^2-4y=4$ 的外面，且通過 A 點的切線（有兩條）與橢圓分別交於 C、D 兩點，請計算出 CD 直線的方程式。

解答

因為 AC 直線與 AD 直線都是切線，所以由「切線準則」知：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{C}}\right]_M^2-\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M\left[\overline{\mathbf{C}},\overline{\mathbf{C}}\right]_M=0$$

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{D}}\right]_M^2-\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}\right]_M\left[\overline{\mathbf{D}},\overline{\mathbf{D}}\right]_M=0$$



但因為 C、D 都在橢圓上，所以：

$$\left[\overline{\mathbf{C}},\overline{\mathbf{C}}\right]_M=0$$

$$\left[\overline{\mathbf{D}},\overline{\mathbf{D}}\right]_M=0$$

因此我們可以知道：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{C}}\right]_M=0$$

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{D}}\right]_M=0$$

雖然目前我們還不知道 C、D 的點座標，但由這兩個方程式，我們知道 C、D 同時符合下面這個方程式：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}\right]_M=0 \quad ，其中\ \overline{\mathbf{X}}=(x,y,1)$$

然而這個方程式本身就是一個直線方程式，請看：

$$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}\right]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}=3x+2y-8=0$$

所以，既然 C、D 同時符合這個方程式，那麼 CD 直線方程式當然就是：

$3x+2y=8$

經由上面這個例題的探討，我們得到一條特殊的直線，這條直線我們稱為「極線」，這是一條通過兩切點的直線。我們將這個重要的結果整理如下：

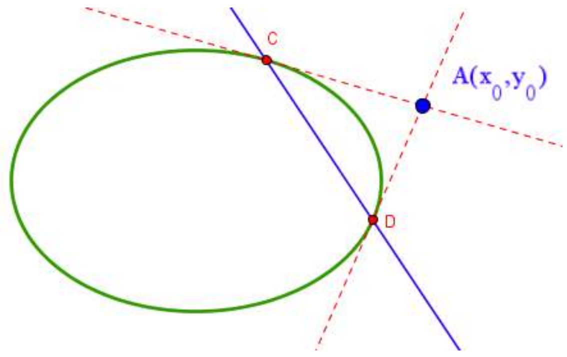
極線公式

若 $A(x_0, y_0)$ 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 外面，通過 A 點的兩條切線交圓錐曲線於 C、D 兩點，則我們稱 CD 直線為 A 點的「極線」，且其方程式為：

$\left[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}\right]_M=0$ ，其中 $\overline{\mathbf{X}}=(x, y, 1)$

也就是極線方程式為：

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & a & b/2 & d/2 \\ y_0 & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \end{array} = 0$$



此時，我們也稱 A 點為 CD 直線的「極點」。

如果你還記得前面的「過切點的切線方程式」公式的話，你會發現：這兩個公式不是一模一樣嗎？是的，的確沒錯！是一模一樣。當 A 點在圓錐曲線外時，這個公式會產生「極線」，但當 A 點到達圓錐曲線上時，它就會變成「切線」！

其實，透過上面的極線公式，我們可以得到一種特殊的對應關係，也就是一個「極點」對應到一條「極線」，更特殊的是：一個「切點」對應到一條「切線」，這種對應關係非常有意思，所以我們打算繼續往下探討，但是因為以下的探討需要用到「矩陣」與「齊次座標」的觀念，因此如果你沒有學過這些觀念，那麼也許你只能先跳過下面這一段！

以下的討論，僅提供給學過「矩陣」與「齊次座標」的讀者！

極點與極線、切點與切線的探索

在更深入討論之前，我們先利用「矩陣」與「齊次座標」的語言，再將前面的結果重新敘述一遍：

假設：

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}$ 為座標平面上定點 A 的齊次座標

$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}a & b/2 & d/2\\ b/2 & c & e/2\\ d/2 & e/2 & f\end{bmatrix}$ 為圓錐曲線的係數矩陣

$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 為座標平面上動點 X 的齊次座標

由前面的討論，我們有下面的結果：

- 若 A 在圓錐曲線上，則 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{MA}=0$
- 若 A 為極點，則 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{MX}=0$ 為極線方程式，我們也可以說 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ 為極線的齊次座標。
- 若 A 為切點，則 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{MX}=0$ 為切線方程式，我們也可以說 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ 為切線的齊次座標。

若我們假設 $\mathbf{u}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ 是一條極線（或切線）的齊次座標，則我們可以推論：

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\\ \Rightarrow\ &\mathbf{uM}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\\ \Rightarrow\ &\mathbf{A}=\left(\mathbf{uM}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

所以我們有以下結果：

- 若 $\mathbf{u}$ 為極線（切線）齊次座標，則 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ 為極點（切點）齊次座標

如果 $\mathbf{u}$ 是切線齊次座標的話，那麼 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ 就是切點，也就是說 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ 在圓錐曲線上，因此我們可以推得：

$$\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)=0$$

也就是：

$$\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$$

所以我們又有了一個很特殊的結果：

切線齊次座標方程式

如果 $\mathbf{u}$ 是切線齊次座標的話，那麼 $\mathbf{u}$ 符合方程式： $\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$

這個「切線齊次座標方程式」有很漂亮的應用，但在應用它之前，我想先說說 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{M}^{-1}$。

$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$ 可以說是圓錐曲線的「齊次座標」，怎麼說呢？且讓我來舉的例子：

比方說，如果我們把橢圓方程式 $x^2+2y^2-4y=4$ 乘以 3 倍，會得到 $3x^2+6y^2-12y=12$，但它還是同一個橢圓方程式啊！也就是說：兩個「係數矩陣」

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$，它們的作用其實是一模一樣的！

所以，如果兩個「係數矩陣」只差一個（非零的）倍數，那麼它就會代表同一個圓錐曲線，這也就是為什麼我們說 $\mathbf{M}$ 算是圓錐曲線的「齊次座標」了！

因此，雖然「切線齊次座標方程式」寫成 $\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$，但因為 $\mathbf{M}^{-1}$ 與 $adj(\mathbf{M})$ 只差一個倍數，所以我們在真正計算的時候，其實直接利用 $adj(\mathbf{M})$ 就可以了。

註：$adj(\mathbf{M})$ 是 $\mathbf{M}$ 的「古典伴隨矩陣」(classical adjoint)。也就是:

$$\text{若 } M=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\text{，則 } adj(\mathbf{M})=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

下面我們就來看看如何應用這個「切線齊次座標方程式」！

切線齊次座標方程式的應用

例題 5　請計算出橢圓 $x^2+2y^2-4y=4$ 上斜率為 2 的切線（有兩條）。

解答

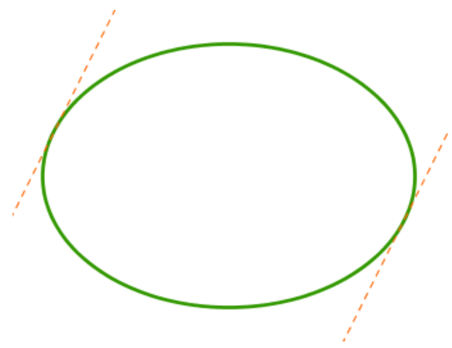
因為切線斜率為 2，我們可以將切線設為：$2x-y+k=0$，

也就是我們可以將切線的「齊次座標」(也就是它的係數）設為：

$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & k \end{bmatrix}$

再來，經由橢圓的「係數矩陣」:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$



我們可以計算出：

$$\mathbf{M}^{-1}\equiv adj(\mathbf{M})=\begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

因為 $\mathbf{u}$ 為切線的「齊次座標」，所以符合：$\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$，因此我們可以得到：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2 & -1 & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = 0$$

整理得：

$$k^2 - 2k - 26 = 0$$
$$k = 1 \pm 3\sqrt{3}$$

因此我們所求的切線為：

$$2x - y + 1 \pm 3\sqrt{3} = 0$$

從上面這個例子可以看到，利用 $\mathbf{M}^{-1}$（或者 $adj(\mathbf{M})$），我們可以計算出已知斜率的切線方程式。所以讓我們再看另一個例子來說明如何計算圓錐曲線標準式的切線。

例題 6 已知橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切線斜率為 m，請計算其方程式。

解答

橢圓標準式的「係數矩陣」為：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

所以：

$$\mathbf{M}^{-1} \equiv adj(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} -1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a^2b^2 \end{bmatrix}$$

假設切線方程式為：$mx - y + k = 0$，也就是假設 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m & -1 & k \end{bmatrix}$，因此根據：

$$\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = 0$$

我們有：

$$-\frac{m^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{a^2b^2} = 0$$

所以推得：

$$k^2 = a^2m^2 + b^2$$
$$k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

因此，我們可以推得已知斜率的橢圓切線公式：

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

經由上面這個例子的啟發，我們可以看得出來，其實每個「標準式」的切線都可以利用相同的方法計算出來。下面我們就列出所有圓錐曲線（橢圓、雙曲線、拋物線）標準式的切線公式（如果斜率是已知的話），但詳細的計算過程，請讀者自行驗證。

已知斜率的切線公式

類型	標準式	M	計算 $\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$	所得切線方程式
橢圓或雙曲線	$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c|ccc} & m & -1 & \mathbf{k} \\ \hline m & \frac{-1}{B} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{-1}{A} & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 & \frac{1}{AB} \end{array}$ $=0$	$y=mx\pm\sqrt{Ax+B}$
拋物線（上下型）	$x^2=4cy$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \\ 0 & -2c & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c|ccc} & m & -1 & \mathbf{k} \\ \hline m & -4c^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2c \\ \mathbf{k} & 0 & 2c & 0 \end{array}$ $=0$	$y=mx-cm^2$
拋物線（左右型）	$y^2=4cx$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2c \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c|ccc} & m & -1 & \mathbf{k} \\ \hline m & 0 & 0 & 2c \\ -1 & 0 & -4c^2 & 0 \\ \mathbf{k} & 2c & 0 & 0 \end{array}$ $=0$	$y=mx+\frac{c}{m}$

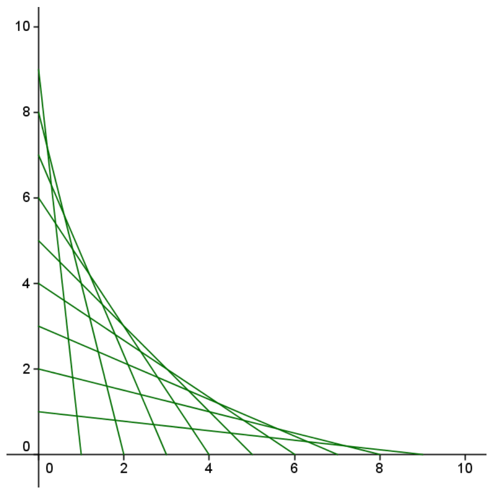
當然，跟前面一樣，我們列出這個公式表，並不是要讀者去背誦它，我們的目的還是在展示最重要的一個觀念：「切線齊次座標方程式」$\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$ 是通用的，而且它不是只能用在標準式而已喔！

下面我們再展示一個更神奇的例子給你看。如果我們不知道圓錐曲線本身的方程式，但知道它的某些切線方程式，我們甚至可以反推出這個圓錐曲線是誰，請看！

例題 7 如右下圖，我們連接$(1,0),(0,9)$、$(2,0),(0,8)$、…，$(9,0),(0,1)$等直線。假設這些直線都是某個圓錐曲線的切線，請問這個圓錐曲線的方程式是什麼？

解答

從右圖這些連接線的連接法，我們可以知道它們的截距式為：



$$\frac{x}{1}+\frac{y}{9}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$$

$$\vdots$$

$$\frac{x}{9}+\frac{y}{1}=1$$

它們可以統一寫成：

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \quad \text{，其中 } m+n=10$$

換句話說，我們可以假設這些線的「齊次座標」為：

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \quad \text{，其中 } u=-\frac{1}{m}, v=-\frac{1}{n}$$

這樣一來，因為 $m+n=10$，所以可以推得：

$$-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=10$$

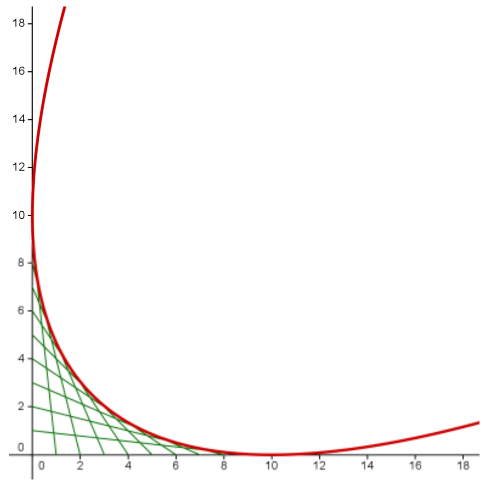
$$10uv+u+v=0$$

而且如果這些線都是某個圓錐曲線的切線，那麼它們會符合切線「齊次座標」的方程式：

$$\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=0$$

但我們知道：$10uv+u+v=0$，所以可以推得：

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1/2 \\ 5 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$



最後我們可以得到：

$$\mathbf{M}\equiv adj(\mathbf{M}^{-1})=\begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 5/2 \\ 1/4 & -1/4 & 5/2 \\ 5/2 & 5/2 & -25 \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & -10 \\ -10 & -10 & 100 \end{bmatrix}$$

也就是原來的圓錐曲線方程式為：

$$x^2-2xy+y^2-20x-20y+100=0$$

進一步的分析讓我們知道它是一個「拋物線」，如右圖。

附錄

(新符號運算性質的證明)

假設 $P=(x_1, y_1, z_1)$、$Q=(x_2, y_2, z_2)$、$R=(x_3, y_3, z_3)$，t 為實數，則有

- 加法分配律：
  $[P+Q, R]_M=[P, R]_M+[Q, R]_M$ 或 $[P, Q+R]_M=[P, Q]_M+[P, R]_M$

- 純量積：
  $[tP, Q]_M=t[P, Q]_M=[P, tQ]_M$

證明

我們先證明加法分配律。假設：

$$M=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

則：

$$[P+Q, R]_M=\begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_1+x_2 & a & b & c \\ y_1+y_2 & d & e & f \\ z_1+z_2 & g & h & i \end{array}$$

$$=a(x_1+x_2)x_3+b(x_1+x_2)y_3+\cdots+i(z_1+z_2)z_3$$

$$\begin{aligned}=\ & ax_1x_3+bx_1y_3+\cdots+iz_1z_3+ \\ & ax_2x_3+bx_2y_3+\cdots+iz_2z_3\end{aligned}$$

$$=\begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_1 & a & b & c \\ y_1 & d & e & f \\ z_1 & g & h & i \end{array}+\begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_2 & a & b & c \\ y_2 & d & e & f \\ z_2 & g & h & i \end{array}$$

$$=[P, R]_M+[Q, R]_M$$

另一邊的加法分配律請讀者自行驗證。

接下來，我們再證明「純量積」。

$$[tP,Q]_M = \begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline tx_1 & a & b & c \\ ty_1 & d & e & f \\ tz_1 & g & h & i \end{array}$$

$$= atx_1x_2 + btx_1y_2 + \cdots + itz_1z_2$$

$$= t(ax_1x_2 + bx_1y_2 + \cdots + iz_1z_2)$$

$$= t \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline x_1 & a & b & c \\ y_1 & d & e & f \\ z_1 & g & h & i \end{array} \right)$$

$$= t[P,Q]_M$$

另一邊的純量積也請讀者自行驗證。

參考資料

- Brannan, D. A.、Esplen, M. F.、Gray, J. J.，**Geometry**，Cambridge，第 166 – 173 頁