1. 在重複丟一個公正硬幣 10 次的試驗中，下列敘述何者是正確的？(多選)

(A) 不可能出現 10 次反面

(B) 出現正面次數的期望值為 5 次

(C) 恰出現 5 次正面的機率為 $\frac{1}{2}$

(D) 出現 6 次正面的機率等於出現 4 次正面的機率

(E) 第 10 次出現正面的機率為 $\frac{1}{2}$

答：__(B)(D)(E)__。

解：(A) 有可能出現 10 次反面　　(B) 出現正面次數的期望值為 $10\times\frac{1}{2}=5$ (次)

(C) 恰出現 5 次正面的機率為 $C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\neq\frac{1}{2}$

(D) 出現 6 次正面的機率為 $C_6^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4$，出現 4 次正面的機率為 $C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$，兩者相等

(E) 第 10 次出現正面的機率亦為一半，即 $\frac{1}{2}$

故答案為 (B)(D)(E)

2. 已知某工廠的生產線生產的產品是不良品的機率高達 $\frac{1}{3}$，今隨機抽樣 5 件產品，求恰好抽中 4 件不良品的機率。

解：每件產品是不良品的機率為 $\frac{1}{3}$，是良品的機率為 $\frac{2}{3}$

恰好抽中 4 件不良品的機率 $C_4^5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{243}$

3. 承第 2 題，求至少抽中 4 件不良品的機率。

解：至少抽中 4 件不良品的情形為：抽中 4 件或抽中 5 件，其機率為

$C_4^5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{10+1}{243}=\frac{11}{243}$

【背面尚有試題】

4. 甲、乙二人作對局遊戲，二人獲勝的機會均等，誰先勝三局可得 8000 元，進行至二局皆甲勝時，發生緊急事故遊戲必須中止。現依先勝三局的機會來分 8000 元，則：

(1) 甲應分得 7000 元。　　　(2) 乙應分得 1000 元。

解：因前二局皆甲勝，所以乙若要勝，則必需連勝三局，不然遊戲就結束，

故 P (乙勝) $= (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$　$\therefore P$ (甲勝) $= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\therefore$ 甲應得 $8000\times\frac{7}{8} = 7000$ (元)，乙應得 $8000\times\frac{1}{8} = 1000$ (元)

5. 設新一在籃球比賽中罰球的命中率為 $\frac{4}{5}$，在每次罰球的結果都是獨立的情形下，求新一 5 次罰球中恰有 2 次投中的機率。

解：新一罰球罰進的機率為 $\frac{4}{5}$，不進的機率是 $\frac{1}{5}$

因為 5 次罰球中恰有 2 次投中的情形有 C_2^5 種，

且每一種的機率都是 $(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^3$，

所以 5 次罰球中恰有 2 次投中的機率為 $C_2^5(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^3 = \frac{32}{625}$

6. 設袋中有玩具硬幣 10 元、5 元各 3 枚，自袋中隨機任取 2 枚，求期望值為多少？

解：< 法 1 > 此試驗可能發生的結果為 10 元、10 元與 10 元、5 元與 5 元、5 元，

發生的機率分別為 $\frac{C_2^3}{C_2^6}$、$\frac{C_1^3 \cdot C_1^3}{C_2^6}$、$\frac{C_2^3}{C_2^6}$，

所以期望值 $= 20\times\frac{3}{15} + 15\times\frac{9}{15} + 10\times\frac{3}{15} = 15$ (元)

< 法 2 > 我們將袋中的硬幣想成有 6 枚總和 45 元的硬幣，

平均一枚硬幣的價值 $= \frac{45}{6}$ (元)，

因此二枚硬幣平均價值 $= \frac{45}{6}\times 2 = 15$ (元)

7. 丟 1 個均勻的硬幣 6 次，求正面出現次數的期望值。

解：< 法 1 > 丟 1 個均勻的硬幣 6 次，根據二項分配，出現正面 k 次的機率為

$C_k^6(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{6-k} = C_k^6(\frac{1}{2})^6$

所以期望值為

$$E=0\times C_0^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+1\times C_1^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+2\times C_2^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+3\times C_3^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+4\times C_4^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+5\times C_5^6\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\times C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{1}{2^6}\left(1\times6+2\times15+3\times20+4\times15+5\times6+6\times1\right)=3$$

＜法 2＞利用期望值的可加性，得 $E=6\times\frac{1}{2}=3$

8. 全校三年級的同學每人擲公正骰子 36 次，設 X 是每人擲出點數是 3 的次數，求 X 的平均數與標準差。

解：平均數 $\mu=E(X)=np=36\times\frac{1}{6}=6$

標準差 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{36\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=\sqrt{5}$

 【背面尚有試題】